УДК 517.946

И. И. Скрыпник

УСТОЙЧИВОСТЬ ГРАНИЧНОЙ ТОЧКИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Получены необходимое и достаточное условия устойчивости по Келдышу граничной точки для дивергентного квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка.

Работа посвящена изучению устойчивости граничной точки для дивергентного квазилинейного эллиптического уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

Ω — ограниченное открытое множество в R^n, $n > 2$. Вопрос устойчивости граничной точки задачи Дирихле для уравнения Лапласа исследован М. В. Келдышем, получившим критерий устойчивости [1].

Предполагается, что $a_i(x, u, p)$, $i = 0, \ldots, n$ определены при $x \in \Omega$, $u \in R^1$, $p \in R^n$ и удовлетворяют при тех же значениях x, u, p и $v \in R^1$, $q \in R^n$ условиям:

а) для почти всех x функции $a_i(x, u, p)$ непрерывны по u, p и для всех u, p $a_i(x, u, p)$ — измеримые функции по x, $a_i(x, 0, 0) = 0$;

б) для $m \geqslant 2$ с положительными постоянными ν, μ выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} [a_i(x, u, p) - a_i(x, v, q)](p_i - q_i) \geqslant \nu |p - q|^2 (1 + |p| + |q|)^{m-2}, \tag{2}$$

$$|a_i(x, u, p) - a_i(x, v, q)| \leqslant \mu \{|u - v| + |p - q|\} w^{m-2}.$$

Здесь $w = 1 + |u| + |v| + |p| + |q|$.

Для $1 < m < 2$ предполагается выполнение неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} [a_i(x, u, p) - a_i(x, v, q)](p_i - q_i) +$$
$$+ [a_0(x, u, p) - a_0(x, v, q)](u - v) \geqslant \nu w^{m-2} |p - q|^2 \tag{3}$$

и второй оценки из (2).

Пусть x_0 произвольная точка на $\partial\Omega$, границе области Ω. Обозначим через $B(x_0, R)$ шар радиуса R с центром в x_0 и пусть $\Omega_R = \Omega \cap B(x_0, R)$, $\varphi_R(x)$ — неотрицательная функция класса $C_0^\infty(B(x_0, R))$, равная единице в $B\left(x_0, \frac{R}{2}\right)$.

Пусть $\{\Omega_j\}$ — последовательность открытых областей, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $\partial\Omega_j \in C^{1+\alpha}$;

 ISSN 0236-0497. Нелинейн. граничн. задачи. 1992. Вып. 4.

б) $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset \Omega_{j+1} \subset \overline{\Omega}_{j+1} \subset \Omega_j$;

в) для любого замкнутого множества F, такого, что $F \subset R^n \setminus \overline{\Omega}$, существует j_0, что $F \subset R^n \setminus \overline{\Omega_{j_0}}$. Пусть $\Omega_{j,R} = \Omega_j \cap B(x_0, R)$.

Определение 1. Назовем $x_0 \in \partial\Omega$ точкой устойчивости задачи Дирихле для уравнения (1), если существует $R > 0$ такое, что для всякой последовательности областей $\{\Omega_j\}$, удовлетворяющей условиям а) — в), обобщенных решений $u_j(x) \in W_m^1(\Omega_{j,R})$, $j = 1, 2, \ldots$, уравнения (1) в $\Omega_{j,R}$, удовлетворяющих условиям

$$\varphi_R(x)[u_j(x) - f(x)] \in \overset{0}{W}{}_m^1(\Omega_{j,R}) \tag{4}$$

с функцией $f(x) \in W_m^1(R^n) \cap C(R^n)$, выполнено равенство

$$\lim_{j\to\infty} u_j(x_0) = f(x_0). \tag{5}$$

Для формулировки условия устойчивости введем еще понятие емкости C_m [2]. Определим ее для произвольного множества $E \subset B\left(x_0, \frac{1}{2}\right)$ равенством

$$C_m(E) = \inf_{\varphi} \int_{B(x_0,1)} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^m dx, \tag{6}$$

где нижняя грань берется по функциям $\varphi \in C_0^\infty(B(x_0, 1))$, равным единице на E.

Теорема 1. Пусть $1 < m \leqslant 2$. Для того чтобы точка $x_0 \in \partial\Omega$ была точкой устойчивости задачи Дирихле для уравнения (1), необходимо, чтобы

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \{C_m(B(x_0, t) \setminus \Omega)\, t^{m-n}\}^{\frac{2}{m}} \frac{dt}{t} = \infty. \tag{7}$$

Теорема 2. Пусть $2 < m < n$. Для того чтобы точка $x_0 \in \partial\Omega$ была точкой устойчивости задачи Дирихле для уравнения (1), необходимо, чтобы

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \{C_m(B(x_0, t) \setminus \Omega)\, t^{m-n}\}^{\frac{1}{m-1+\varepsilon}} \frac{dt}{t} = \infty, \tag{8}$$

где $\varepsilon = (m-2)\frac{n}{m}$.

Теорема 3. Пусть $1 < m < n$. Для того чтобы точка $x_0 \in \partial\Omega$ была точкой устойчивости задачи Дирихле для уравнения (1), достаточно, чтобы

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \{C_m(B(x_0, t) \setminus \Omega)\, t^{m-n}\}^{\frac{1}{m-1}} \frac{dt}{t} = \infty. \tag{9}$$

Укажем основные моменты доказательства необходимости и достаточности устойчивости граничной точки x_0.

1. Необходимость. Пусть, например, $2 < m < n$. Отметим, что условие (8) эквивалентно условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{2^{k(n-m)} C_m(E_k)\}^{\frac{1}{m-1+\varepsilon}} = \infty, \quad E_k = B(x_0, 2^{-k}) \setminus \Omega. \tag{10}$$

Возьмем в качестве $f(x) = f_1(x)$, где $f_1(x) \in C_0^\infty(B(x_0, R))$, $f_1(x)$ равна единице в $B\left(x_0, \frac{R}{2}\right)$. Определим $u_j^{(k)}(x)$ как решение задачи:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x \in D_j^{(k)} = B(x_0, R) \setminus E_j^{(k)}, \tag{11}$$

$$u_j^{(k)}(x) - f_1(x) \in \overset{0}{W}{}_m^1(D_j^{(k)}), \tag{12}$$

где $E_j^{(k)} = B(x_0, 2^{-k}) \setminus \Omega_j$. Для любого j определим $k(j)$ такое, что

$$B(x_0, 2^{-k(j)-1}) \cap \{R^n | \Omega_j\} = \varnothing, \quad B(x_0, 2^{-k(j)}) \cap \{R^n | \Omega_j\} \neq \varnothing.$$

Лемма 1. Пусть $k \geqslant k(j)$, тогда $u_j^{(k)}(x) = 0$ при $k > k(j)$, а при $k = k(j)$ имеем

$$\max_{|x-x_0| \leqslant 2^{-(k(j)+n)}} |u_j^{k(j)}(x)| \leqslant A \{2^{k(j)(n-m)} C_m (E_j^{k(j)}) + 2^{-mk(j)}\}^{\frac{1}{m-1+\varepsilon}}, \qquad (13)$$

где A — некоторая константа, зависящая только от n, ν, μ. Так как $E_j^{(k)} \subset E_k$, то из (13) следует

$$\max_{|x-x_0| \leqslant 2^{-(k(j)+n)}} |u_j^{k(j)}(x)| \leqslant A \{2^{k(j)(n-m)} C_m (E_{k(j)}) + 2^{-mk(j)}\}^{\frac{1}{m-1+\varepsilon}}. \qquad (14)$$

Лемма 2. Пусть $k < k(j)$. Определим $\delta_j^{(k)}(x) = u_j^{(k)}(x) - u_j^{(k+1)}(x)$. Тогда

$$\max_{|x-x_0| \leqslant 2^{-(k+n)}} |\delta_j^{(k)}(x)| \leqslant A \{2^{k(n-m)} C_m (E_j^{(k)}) + 2^{-mk}\}^{\frac{1}{m-1+\varepsilon}}, \qquad (15)$$

A — та же, что и в лемме 1.

Из (15) следует, что

$$\max_{|x-x_0| \leqslant 2^{-(k+n)}} |\delta_j^{(k)}(x)| \leqslant A \{2^{k(n-m)} C_m (E_k) + 2^{-mk}\}^{\frac{1}{m-1+\varepsilon}}. \qquad (16)$$

При доказательстве лемм 1, 2 используются методы, развитые в [3]. Доказательство ведем от противного. Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{2^{k(n-m)} C_m (E_k)\}^{\frac{1}{m-1+\varepsilon}} < \infty.$$

Выберем $\bar{k}$ так, чтобы

$$A \sum_{k=\bar{k}}^{\infty} \{2^{k(n-m)} C_k (E_k) + 2^{-mk}\}^{\frac{1}{m-1+\varepsilon}} < \frac{1}{4}. \qquad (17)$$

В неустойчивости точки x_0 убедимся на примере функции $u_j^{(\bar{k})}(x)$, $j = 1, 2, \ldots$.

Необходимость будет доказана, если покажем, что

$$\lim_{j \to \infty} u_j^{(\bar{k})}(x_0) < 1.$$

Действительно, используя (14), (16), (17), имеем

$$|u_j^{(\bar{k})}(x_0)| \leqslant \sum_{l=\bar{k}}^{k(j)-1} |u_j^{(l)}(x_0) - u_j^{(l+1)}(x_0)| + |u_j^{k(j)}(x_0)| \leqslant$$

$$\leqslant A \sum_{l=\bar{k}}^{k(j)-1} \{2^{l(n-m)} C_m (E_l) + 2^{-ml}\}^{\frac{1}{m-1+\varepsilon}} +$$

$$+ A \{2^{k(j)(n-m)} C_m (E_{k(j)}) + 2^{-mk(j)}\}^{\frac{1}{m-1+\varepsilon}} < \frac{1}{2}.$$

Отсюда и следует доказательство необходимости.

2. Достаточность. Пусть $1 < m < n$ и выполнено условие

$$\int_0^{\frac{1}{2}} [C_m (B(x_0, t) \setminus \Omega) t^{m-n}]^{\frac{1}{m-1}} \frac{dt}{t} = \infty.$$

Требуется доказать, что $\lim_{j \to \infty} u_j(x_0) = f(x_0)$, $f(x)$ — произвольная функция из $W_m^1(R^n) \cap C(R^n)$. Определим $L = \overline{\lim_{j \to \infty}} u_j(x_0)$, $l = \underline{\lim_{j \to \infty}} u_j(x_0)$ и покажем, что

$$L \leqslant f(x_0), \quad l \geqslant f(x_0)_0. \qquad (18)$$

Докажем от противного первое неравенство в (18), другое доказывается аналогично. Пусть $L > f(x_0)$ и последовательность j_l такова, что

$$j_l \to \infty \quad \text{при} \quad l \to \infty, \quad u_{j_l}(x_0) \to L. \qquad (19)$$

Определим $\tilde{u}_j^{(k)}(x) = \begin{cases} \max\{u_j(x) - k,\ 0\}, & x \in \Omega_j, \\ 0, & x \notin \Omega_j, \end{cases}$

$$\tilde{\mu}_j^{(k)}(r) = \operatorname{vraimax}\{\tilde{u}_j^{(k)}(x),\ x \in B(x_0, r)\}.$$

Пусть $\psi_r(x, y) \in C_0^\infty(B(y, r))$, равная единице в $B\left(y, \frac{r}{2}\right)$. Если взять $k > f(x_0)$, то можно выбрать $r_0(k)$ так, чтобы $u_j^{(k)}(x)\,\psi_r(x, y) \in \overset{0}{W}{}_m^1(\Omega_j)$ при $r \leqslant r_0(k)$.

Лемма 3. Существует положительная постоянная $c = c(n, \nu, \mu)$, такая, что при $k > f(x_0)$, $r \leqslant \frac{1}{4} r_0(k)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega_{j,R}} \left| \frac{\partial}{\partial x} [\psi_r(x, x_0)(\tilde{\mu}_j^{(k)}(r) - \tilde{u}_j^{(k)}(x) + r)] \right|^m dx \leqslant$$

$$\leqslant c r^{n-m} [\tilde{\mu}_j^{(k)}(r) + r] \left[\tilde{\mu}_j^{(k)}(r) - \tilde{\mu}_j^{(k)}\left(\frac{r}{2}\right) + r \right]^{m-1}. \tag{20}$$

Отсюда по определению емкости имеем

$$\tilde{\mu}_j^{(k_0)}(r) + r]^{m-1} C_m\left(B\left(x_0, \frac{r}{2}\right) \diagdown \Omega_j\right) \leqslant r^{n-m}\left[\tilde{\mu}_j^{(k_0)}(r) - \tilde{\mu}_j^{(k_0)}\left(\frac{r}{2}\right) + r\right]^{m-1}. \tag{21}$$

При доказательстве леммы 3 используются методы работы [4].

Пусть $\rho > 0$ — произвольное положительное число. По заданному ρ выберем $j = j(\rho)$ так, чтобы при $r \geqslant \rho$, $j \geqslant j(\rho)$ выполнялось неравенство

$$C_m\left(B\left(x_0, \frac{r}{2}\right) \diagdown \Omega_j\right) \geqslant \frac{1}{2} C_m(B(x_0, r) \diagdown \Omega).$$

Это обеспечивается условием сходимости областей Ω_j.

Перепишем тогда при $\frac{r}{2} > \rho$, $j \geqslant f(\rho)$ оценку (21) в виде

$$r^{m-n} C_m(B(x_0, r) \diagdown \Omega) \leqslant K_1 \frac{1}{[\tilde{\mu}_j^{(k_0)}(2r) + r]^{m-1}} [\tilde{\mu}_j^{(k_0)}(2r) - \tilde{\mu}_j^{(k_0)}(r) + r]^{m-1}. \tag{22}$$

Если теперь выбрать $j \geqslant j(\rho)$ столь большим, чтобы $\mu_j^{(k_0)}(2r) > \frac{L - k_0}{2}$, то из (20) следует

$$\int\limits_{2\rho}^{a} [r^{m-n} C_m(B(x_0, r) \diagdown \Omega)]^{\frac{1}{m-1}} \frac{dr}{r} \leqslant K_2 \int\limits_{2\rho}^{a} [\tilde{\mu}_j^{(k_0)}(2r) - \tilde{\mu}_j^{(k_0)}(r) + r] \frac{dr}{r} \leqslant$$

$$\leqslant K_2 \left\{ \int\limits_{a}^{2a} \tilde{\mu}_j^{(k_0)}(t) \frac{dt}{t} + a \right\}.$$

Правая часть не зависит от ρ, а левая может стать сколь угодно большой при достаточно малом ρ. Получаем противоречие, доказывающее достаточность.

1. *Келдыш М. В.* О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле // Успехи мат. наук.— 1941.— Вып. 8.— С. 171—231.
2. *Мазья В. Г.* Непрерывность в граничной точке решений квазилинейных эллиптических уравнений // Вестн. Ленинград. ун-та.— 1970.— **13**, № 3.— С. 42—55.
3. *Скрыпник И. В.* Критерий регулярности граничной точки для квазилинейных эллиптических уравнений // Докл. АН СССР.— 1984.— **274**, № 5.— С. 1040—1044.
4. *Gariepy R., Ziemer W. P.* A regularity condition at the boundary for solutions of quasilinear Miptic equations // Arch. Ration. Mech. and Anal.— 1977.— **67**, N 1.— P. 25—39.

Донецк. гос. ун-т Получено 17.12.90